

円形翼列剝離流れの数値計算

久 保 忠 延

1 緒 言

近年電子計算機の高性能化（高速化，大容量化）に伴っていろいろな物理現象や工学上の問題などを数値的に解くことが盛んに行われている。計算の対象を流れの問題に限定しても各種の数値計算法があり，対象とする流れに応じてそれらの手法が適宜選択され，流れに関する計算が行われている。

それらの数値計算法のうち，離散うず法（discrete vortex method）は，これまで解析困難とされていた高レイノルズ数域の剝離流れを取扱えるものとして最近注目されている¹⁾。しかし，この手法は，これまで主として円柱や平板等の単純な形状をした物体の後方流れの計算などに適用され，その有用性が認められているといった状況である²⁾³⁾。

本研究では，この離散うず法と従来から流体力学の分野で流れの解析に用いられている特異点法を組み合わせることにより，複雑な形状を有する物体の剝離流れの取扱いを可能にした。計算対象として，実用的な円形翼列をとりあげ，その軸対称剝離流れと非対称剝離流れの各々について計算を行った。

2 円形翼列の失速

遠心ポンプや遠心ファンなどの半径流型ターボ機械の羽根車は多くの場合二次元の円形翼列として取扱うことができる。そして，それらの機械を設計点近傍で運転した場合は，羽根車内の流れはほぼ羽根形状に沿ってスムーズに流れるが，流量を減じてゆくと次第に羽根間流路の流れの非一様性が増大し，やがて流路内に局部的な死水域または逆流域が生じるいわゆる失速状態を呈するようになる。このような失速が従来は羽根車に軸対称に生じると考えられていたが⁴⁾，最近では非軸対称な失速の生じることも見出されている⁵⁾。そこで本研究ではまずはじめに羽根車（円形翼列）に生じる失速（剝離）を軸対称であるとの仮定のもとに計算を行い，つぎに非対称性を与えた場合の剝離流れの計算を行った。

3 円形翼列の軸対称剝離流れ

3.1 計算方法

図1に示した円形翼列の羽根形状に沿ってうず（固定うず）を分布させる（特異点法）。また，流れの不連続面，剝離域の境界に生じるうず面を離散化したうず糸（自由うず）の分布で置き換える（離散うず法）。自由うずの流出点は羽根の前縁，後縁の延長上に固定し，微小時間間隔ごとに流出する自由うずおよび羽根面上の固

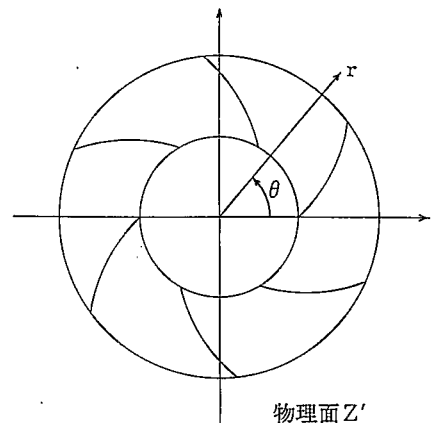


図1 円形翼列

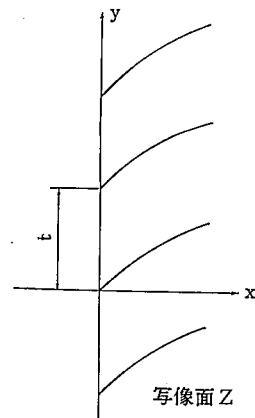


図2 直線翼列

定うずの強さを境界条件より定める。円形翼列内の流れは通り抜け流れ、押しのけ流れ、循環流れの三つに分けて考えることができる。これらの流れのうち写像可能な部分を図2に示す直線翼列において求め、これを再び円形翼列に戻し、これに写像できなかった流れを物理面で重ね合わせる。このようにして求めた流れ場に従って自由うずの流出を行わせる。微小時間後再び同様の手順で流れ場を決定し新たな自由うずを流出させ、既に流出した自由うずの移動も行う。このような操作を順次繰り返す、流れの状態を進行させる。

3.2 流れを求める関係式

1) 写像

図1の円形翼列を図2の無限直線翼列に写像する。

$$\text{写像関数: } z = -\frac{N}{2\pi} \log(z'/r_1)$$

$$\text{写像定数: } \left| \frac{dz'}{dz} \right| = \frac{2\pi}{N} r$$

ただし、 r : 動径

N : 羽根枚数 (円形翼列)

r_1 : 羽根車内径

2) うずによる誘起速度 (写像面)

固定うずの強さ Γ_j ($j=1, 2, \dots, m$)

自由うずの強さ $\Gamma_{k,l}$ ($k=1, 2; l=1, 2, \dots, n$)

とすると任意点 z における誘起速度 (共役複素速度) は

$$\bar{V}(z) = \frac{i}{2t} \left\{ \sum_{j=1}^m \Gamma_j \coth \kappa(z-z_j) + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^n \Gamma_{k,l} \coth \kappa(z-z_{k,l}) \right\} \dots (1)$$

ただし、 i : 虚数単位

t : 翼列ピッチ (直線翼列)

$\kappa: \pi/t$

3) 通り抜け流れ

翼列の単位幅当たりの流量を Q とすると物理面における絶対速度の r, θ 方向成分はそれぞれ、 $C_r = Q/(2\pi r)$, $C_\theta = 0$

写像面の x 方向、 y 方向速度成分は

$$U_x = C_r \left| \frac{dz'}{dz} \right|, \quad U_y = 0$$

写像面での境界条件は

$$V_N(z_i) = I_m \{ \bar{V}(z_i) e^{i\gamma_i} \} + U_x \sin \gamma_i = 0$$

すなわち、 $I_m \{ \bar{V}(z_i) e^{i\gamma_i} \} = -U_x \sin \gamma_i \dots \dots \dots (2)$

$$(i=1, 2, \dots, m+1)$$

ただし、 V_N : 翼面上の法線速度成分

γ_i : 翼接線方向と流れ方向のなす角

z_i : 翼面上のコントロールポイントの座標

4) 押しのけ流れ

物理面で羽根車に対する相対流れ w の r, θ 方向成分

を w_r, w_θ とする。流れ関数 Ψ を、

$$w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad w_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

で定義すると、絶対流れが非回転であるためには

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = -2\omega$$

この解を $\Psi = -\frac{1}{2} \omega r^2 + \Psi'$ とおけば Ψ' は Laplace の式を満足するので等角写像が可能である。そこで Ψ' の流れを z 面 (写像面) に写像して流れを求める。 z' 面 (物理面) での Ψ' の流れの r, θ 方向成分を w'_r, w'_θ とすると、

$$w_r = w'_r, \quad w_\theta = w'_\theta + r\omega$$

Ψ の流れで物理面の羽根面上法線方向速度成分を V_{No} とし、 Ψ' の流れのそれを V'_{No} とすると $V_{No} = V'_{No} - r_1 \omega \cos \gamma_i$

物理面上での境界条件は $V_{No} = 0$ すなわち

$$V'_{No} = r_1 \omega \cos \gamma_i \text{ (押しのけ流れ)}$$

この押しのけ流れは写像面においては

$$V_N(z_i) = V'_{No} \left| \frac{dz'}{dz} \right| = \frac{2\pi \omega r_1^2}{N} \cos \gamma_i$$

したがって写像面における境界条件は

$$I_m \{ \bar{V}(z_i) e^{i\gamma_i} \} = \frac{2\pi \omega}{N} r_1^2 \cos \gamma_i \dots \dots \dots (3)$$

5) うずの強さ Γ

式(2), (3)の辺々を加え、左辺の 2Γ を改めて Γ とおけば

$$I_m \{ \bar{V}(z_i) e^{i\gamma_i} \} = \frac{2\pi \omega}{N} r_1^2 \cos \gamma_i - U_x \sin \gamma_i \dots \dots \dots (4)$$

これにうずの総和が零の条件 (Kelvin の定理) より

$$\sum_{j=1}^m \Gamma_j + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^n \Gamma_{k,l} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

を付加すると条件式と未知数の数が一致する。式(4), (5)より Γ_j ($j=1, 2, \dots, m$), $\Gamma_{1,n}$, $\Gamma_{2,n}$ を決定する。

6) 自由うずの位置における誘起速度

前項 5) で求めた Γ にもとづく写像面上自由うず位置 $z_{g,h}$ ($g=1, 2; h=1, 2, \dots, n$) での誘起速度は

$$\bar{V}_F(z_{g,h}) = \frac{i}{2t} \left\{ \sum_{j=1}^m \Gamma_j \coth \kappa(z_{g,h} - z_j) + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^n \Gamma_{k,l} \coth \kappa(z_{g,h} - z_{k,l}) \right\} \dots (6)$$

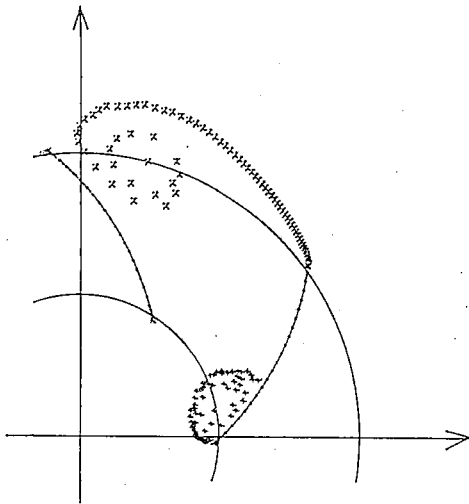
流れの x 方向、 y 方向成分は

$$V_x = \operatorname{Re} \{ \bar{V}_F(z_{g,h}) \}, \quad V_y = -\operatorname{Im} \{ \bar{V}_F(z_{g,h}) \}$$

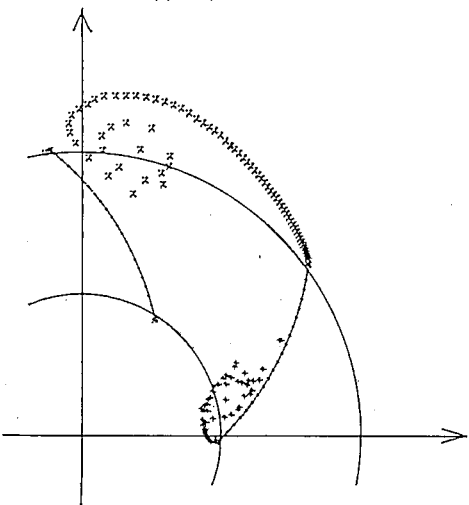
物理面上では V_x は径方向、 V_y は θ 方向に対応し、

$$V'_r = V_x \left| \frac{dz'}{dz} \right|, \quad V'_\theta = V_y \left| \frac{dz'}{dz} \right|$$

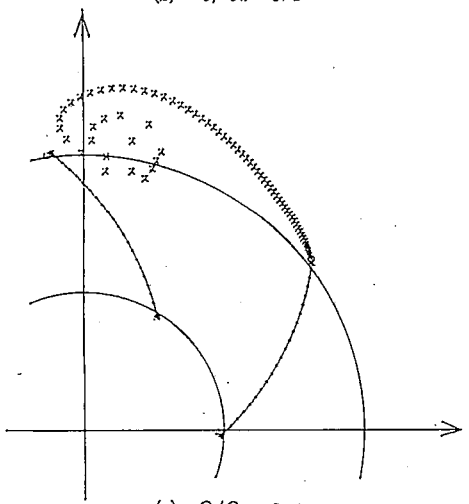
これに通り抜け流れおよび羽根回転の影響を加え合えると物理面において



(a) $Q/Q_n=0.2$

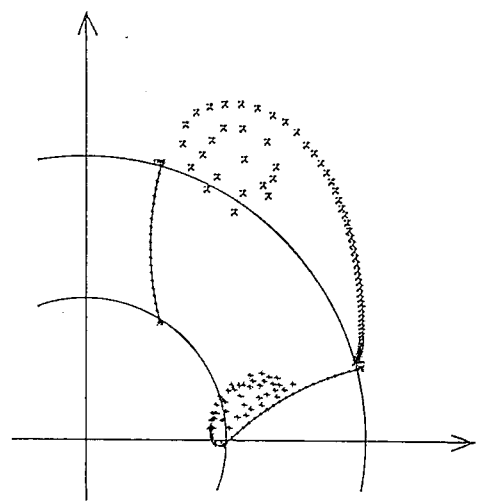


(b) $Q/Q_n=0.3$

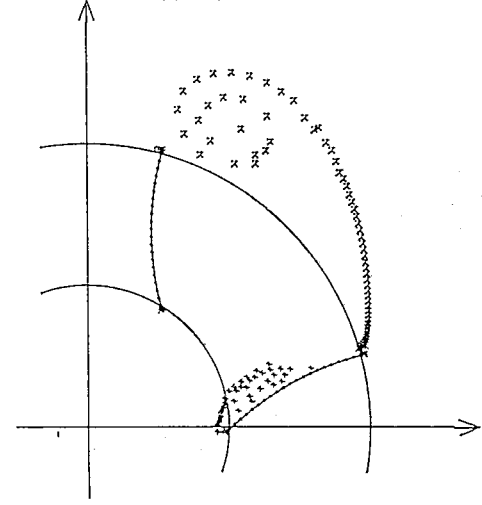


(c) $Q/Q_n=0.4$

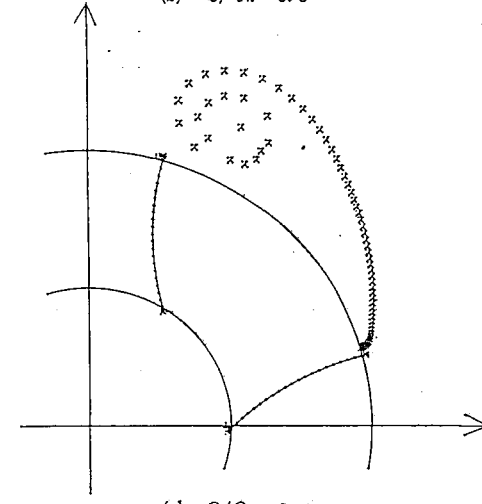
図3 対称剝離 (後向き羽根)



(a) $Q/Q_n=0.4$



(b) $Q/Q_n=0.6$



(c) $Q/Q_n=0.7$

図4 対称剝離 (径向き羽根)

$$\left. \begin{aligned} \text{径方向速度成分 } V_r &= V'_r + C_r \\ \text{周方向速度成分 } V_\theta &= V'_\theta + r\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

7) 自由うずの移動

式(7)より求めた速度にもとづき ΔT 時間後のうずの移動位置を求める。

移動前のうず位置の座標を (x, y) , 移動後の座標を (x', y') とすると,

$$x' = x + V \cdot \Delta T \cos(\theta + \delta)$$

$$y' = y + V \cdot \Delta T \sin(\theta + \delta)$$

ただし, $V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$, $\delta = \tan^{-1}(V_\theta/V_r)$

3.3 パラメータの選定

1) 固定うず

羽根が写像面で等分割になるように細分し, 各々の細分区域の中央に固定うずを置く。羽根前縁, 後縁および分割点を境界条件を合わせる点(コントロールポイント)とする。固定うずの数を N_B , コントロールポイントの数を N_C とすると $N_C = N_B + 1$ となる。本計算では $N_B = 20$ とした。

2) 近寄り限界

自由うずが互いに接近すると誘起速度が次第に大きくなり, ある距離以下では非現実的な誘起速度を生ずるようになる。うず接近によるこのような流速発生を抑える方法としては, ある一定距離以内に接近したうずを1個の等価なうずに置きかえる方法, うずに核構造を持たせる方法などがあるが, 本計算においては後者に相当する方法すなわち, 近寄り限界距離 d を設け, それ以下の距離にうずが互いに近づいた場合, それらが互いに他に誘起する速度は両者が d の距離にある場合に等しいとした。また, 自由うずが壁面から d 以内に接近した場合は, 壁面に付着消散したとして以後の計算からは取り除いた。近寄りの限界値として $e = d/l = 0.025$ とした。(l は流れ場の代表値として選んだ物理面の羽根長さである。)

3) 自由うず流出点

物理面における羽根長さを l , うずの近寄り限界値を e としたとき自由うずの流出点を羽根前縁および後縁の延長上の $s = 1.1 \cdot l \cdot e$ の位置に設定した。

4) うず移動の時間間隔

境界条件より求めた流れ場の状態に従って自由うずが移動し始めると次第に境界条件が満たされなくなり, 時間とともに条件からの外れが大きくなる。そこで適当な時間間隔の後に改めて境界条件を満たすように流れ場を決める必要がある。この時間間隔は短い程境界条件から外れた状態でのうず移動が少ないわけであるが, 時間間隔 ΔT が小さいと現象がなかなか進行せず, 計算機の計算時間の制約から現象を長時間にわたって調べることがで

きなくなる。現在のところ ΔT の値の選定に関しては明確な基準がなく, 多くの場合試行錯誤的に妥当な値を見出ししている。本研究の場合には $\Delta T = 0.00015$ を採用している。

3.4 計算例

図3, 図4に計算結果を図示した例を示した。流れは軸対称であるので, 流れ状態は羽根1枚についてのみ示し, 円形翼列も流れ状態を示した羽根を含む一部のみを示した。羽根枚数はいずれも6枚である。

図3は後向き羽根の場合で, 翼列形状としては内径 $d_1 = 0.4$ m, 外径 $d_2 = 0.8$ m, 羽根入口角 $\beta_1 = 45^\circ$, 出口角 $\beta_2 = 45^\circ$ の円弧羽根である。図3の(a), (b), (c)は流量比 Q/Q_n がそれぞれ0.2, 0.3, 0.4である。

図4は径向き羽根の場合で, $d_1 = 0.4$ m, $d_2 = 0.8$ m, $\beta_1 = 45^\circ$, $\beta_2 = 90^\circ$ の円弧羽根。流量比はそれぞれ0.4, 0.6, 0.7である。

図3, 図4のいずれの場合も $\Delta T = 0.00015$ sec で, ステップ数70まで計算した結果である。

4 円形翼列の非対称剝離流れ

4.1 計算方法

流れが非対称であるため, 前章のように写像して流れを計算することはできない。したがって物理面のみで流れを取扱う。流れに非対称性を与えるため, 翼列のうち1枚が何らかの原因で他の羽根よりも早く剝離を起した場合を想定し, 前章で剝離した羽根の流れ状態をそのままこれからうず流出を開始する円形翼列の羽根の1枚に与え, 初期状態とする。

4.2 誘起速度

円形翼列の羽根枚数を N , 先行剝離うずの流出回数(先行ステップ数)を S , 流量(翼列の単位幅あたり) Q m³/s とすると, 任意点における誘起速度(共役複素速度) $\bar{V}(z)$ は

$$\begin{aligned} \bar{V}(z) = & \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^S \Gamma_{k,l} \frac{1}{z - z_{k,l}} \\ & + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{f=1}^m \Gamma_{f,j} \frac{1}{z - z_{f,j}} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^n \Gamma_{f,k,l} \frac{1}{z - z_{f,k,l}} \right\} + \frac{Q}{2\pi z} \end{aligned}$$

ただし $z_{k,l}$: 先行剝離した自由うずの座標

$z_{f,j}$: 固定うずの座標

$z_{f,k,l}$: 各羽根から流出した自由うずの座標

4.3 境界条件

相対流れにおいて, 羽根が流線となるための条件式は

$$I_m[\bar{V}(z_{f,i}) e^{i\theta_{f,i}}] = r_{f,i} \omega \cos(\theta_{f,i} - \theta_{f,i})$$

ただし $z_{f,i}$: コントロールポイントの座標

$\theta_{f,i}$: コントロールポイントの偏角

$r_{f,i}$: コントロールポイントにおける羽根角
の余角

$\delta_{f,i} = \theta_{f,i} + r_{f,i}$

$r_{f,i}$: コントロールポイントの動径

4.4 計算手順

軸対称剝離流れとして計算した結果の1枚の羽根についての流れ状態をこれから自由うずの流出を開始させようとする円形翼列の羽根のうちの1枚に与える。この状態で境界条件を満たすべく流れ場を決める (Γ の計算)。求まった流れ場に従って自由渦の流出および移動を行う。翼列を回転し、うずの羽根への接近状態をチェックしてからつぎのステップに進む。計算のフローチャートを図5に示す。

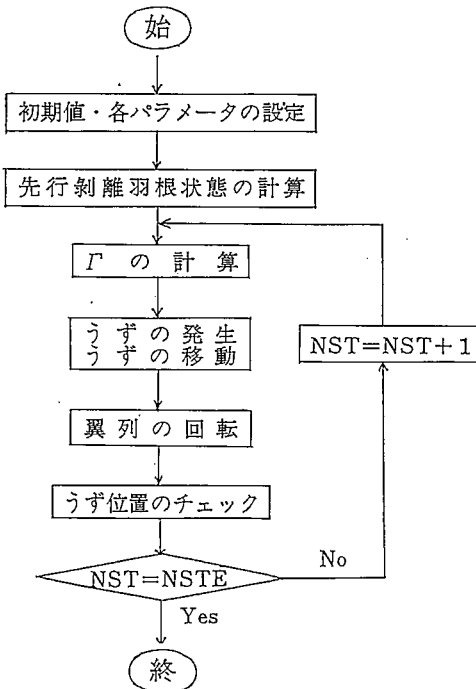


図5 計算のフローチャート

4.5 計算例

計算例を図6, 図7に示した。

図6の後向き羽根の翼列は内径 $d_1=0.4$ m, 外径 $d_2=0.8$ m, 羽根入口角 $\beta_1=45^\circ$, 出口角 $\beta_2=45^\circ$ である。流量比は $Q/Q_n=0.38$, 先行剝離のステップ数は70となっている。

図7の径向き羽根の翼列は $d_1=0.4$ m, $d_2=0.8$ m, $\beta_1=45^\circ$, $\beta_2=90^\circ$ であり, 流量比 $Q/Q_n=0.6$, 先行うずのステップ数は70である。

5 結果の考察

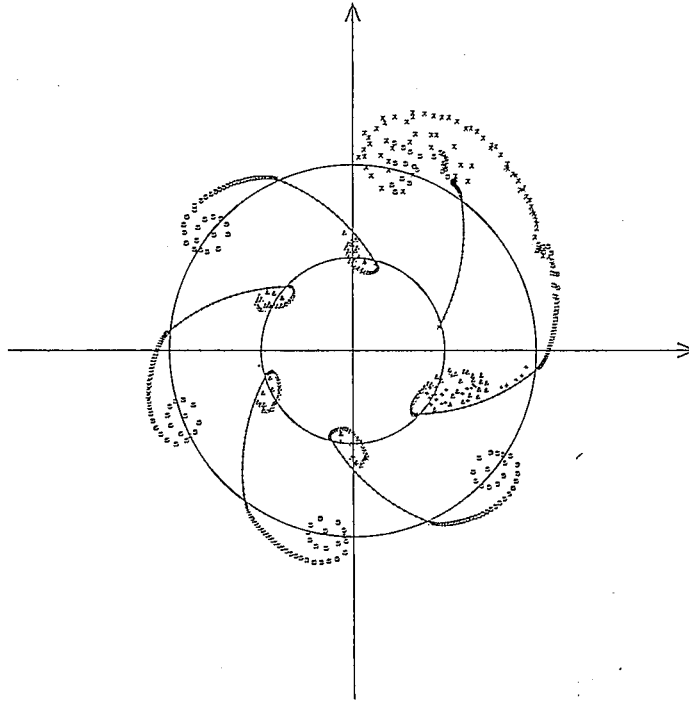
流れ状態を示す図3, 4, 6, 7はいずれも大型計算機に接続された自動製図装置によって描かれたものである。

軸対称流れを示す図3, 図4を見ると, 羽根後縁から流出したうずはきれいに巻き上っているのがわかる。前縁においては, 流量の小さい状態では剝離が起り(図3, 4の(a), (b)), 流量の大きい場合には剝離が起っていない(図3, 4の(c))。そして剝離の起る場合の(a)と(b)を比較すると流量の小さい(a)の方が剝離域は広がっている。また, 前縁で剝離の生じる限界の流量は後向き羽根と径向き羽根で異っており, 図に示した羽根形状の場合については後向き羽根の場合が $Q/Q_n=0.3\sim 0.4$, 径向き羽根の場合が $Q/Q_n=0.6\sim 0.7$ であった。

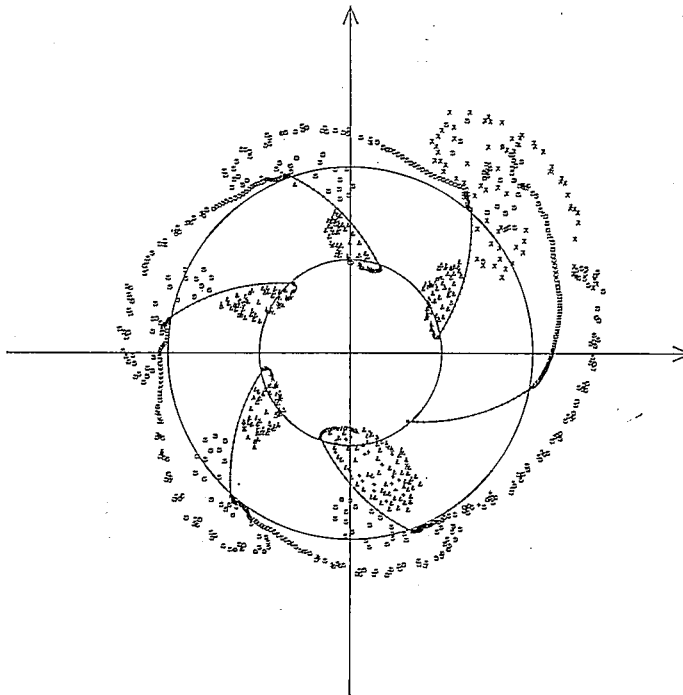
図6, 図7は非対称剝離の計算結果を示したものである。図6は後向き羽根の場合であるが, ステップ数40の(a)の場合, 先行剝離した羽根では他の羽根よりも前縁よりの剝離域が大きくなっており, 羽根全長の半分以上に達している。そして, 後縁からの流出うずは羽根車の回転方向(時計回り方向)と逆方向のとなりの羽根の後方に回り込んで, その羽根からのうずの流出速度を抑制していることがわかる。そしてその羽根の前縁のみ剝離が生じていない。他の4枚の羽根はほぼ同じようなフローパターンを示しており, 後縁からの流出渦は軸対称の計算の場合と同様きれいに巻き上っている。それらの後流うずはまだ先行剝離羽根からの後流うずほど他の羽根のうず流出状態に影響を及ぼしていない。前縁からの剝離は後縁からのうずほど明瞭ではないがやはり剝離うずの巻き込みが見られる。ステップ数の少ない早い時期に流出したうずの一部は羽根に再付着して消滅している。

図6(b)はステップ数100まで計算した場合であるが, 失速状態がかなり進行しており, 先行剝離した羽根では流路の相当部分が失速域で占められている。この羽根の反時計方向となりの羽根は相変わらず非失速状態を保っている。羽根後縁からの流出うずはとなりの羽根からの流出うずと互いに干渉しあいステップ数40で見られたきれいなうずの巻き上りはくずれている。

図7は前向き羽根について計算した結果である。ステップ数40の場合, 図6(a)の後向き羽根と類似のフローパターンを示している。軸対称剝離の計算で, 径向き羽根の方が後向き羽根の翼列の場合より大きな流量比で失速が開始したが, 非対称な場合も同様であった。後向き羽根の失速限界は図6の翼列形状でおよそ $Q/Q_n=0.3\sim 0.4$ の間, 図7の径向き羽根の場合で $Q/Q_n=0.5\sim 0.6$ の間であり, これらは実験的に知られている失速限界値

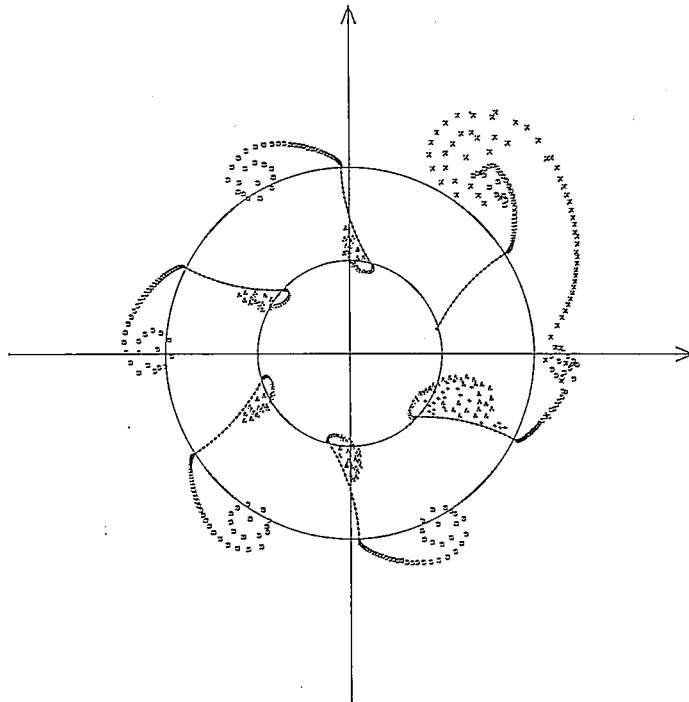


(a) $Q/Q_n=0.38$ NST=40

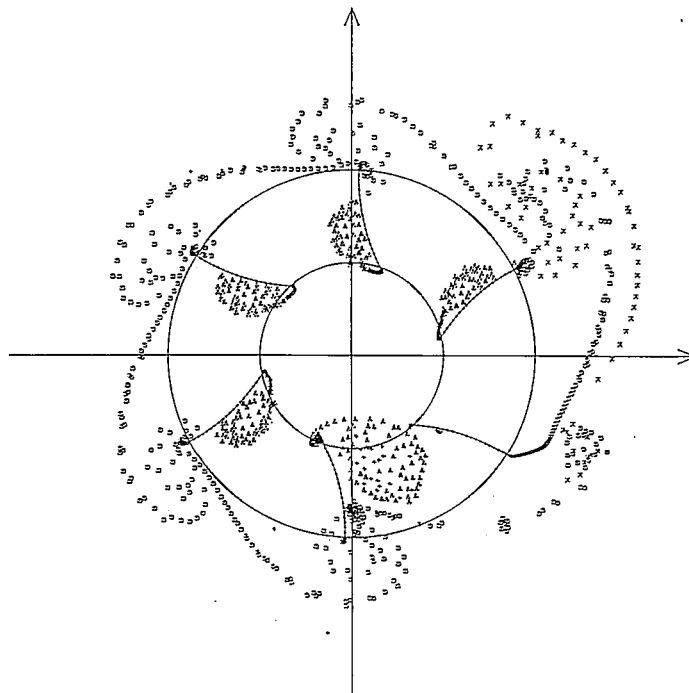


(b) $Q/Q_n=0.38$ NST=100

図6 非対称剥離 (後向き羽根)



(a) $Q/Q_n=0.6$ NST=40



(b) $Q/Q_n=0.6$ NST=100

図7 非対称剝離（径向き羽根）

に近い値となっている。

図7(b)は更にステップ数の進んだ場合であるが、先行剝離羽根の背後の流路は入口近くのほぼ全域が失速域で占められている。それにともなって羽根前縁では羽根前面側にうずが回り込み始めている。羽根後縁部ではとなりの羽根からの後流の影響が顕著となり、ここでも一部を除いてうずの巻き方が逆方向になり始めている。

図6、図7を通じて羽根前縁で生じる剝離うずの巻き込みは実験的に観察されたうずによく類似したものであり、また、後縁からの渦の巻き上りも単独翼の場合によく知られた後流と同様の状態を示している。

6 結 言

本研究は近年高レイノルズ数域の流れの計算法として注目され始めた離散うず法の円形翼列に対する適用を試みたものである。

離散うず法と特異点法を結びつけて用いることにより円形翼列の剝離流れの計算が可能であることを確めた。そして計算で得られた結果の流れは、いくつかの点で実験的に知られている流れ状態をよく表わすことがわかった。しかし、離散うず法にはいくつかの任意設定パラメータが存在するため、この手法により流れの特性を定量

的に算定するためには、パラメータの選定に対する合理的な基準を見い出さねばならない。この点は今後の課題と考える。

本研究は昭和57年度大阪大学への内地留学の際に行われたものであり、御指導いただいた大阪大学工学部三宅裕教授ならびに兵庫教育大学小川武範助教授に感謝致します。

尚、計算は大阪大学 大型計算機センター ACOS 1000を使用した。お世話になったセンターの皆様へ感謝致します。

文 献

- 1) 亀本番司：ターボ機械，9-5 17 (1981)
- 2) 永野三郎 内藤政彦 高田浩之：日本機械学会論文 集，47-413 32 (1981)
- 3) 木谷勝 有江幹男：日本機械学会論文 集，43-367 1015 (1982)
- 4) 村上光清：日本機械学会誌，70-580 643 (1967)
- 5) 久保忠延：日本機械学会論文 集，46-403 383 (1980)
- 6) 矢倉周造：大阪大学修士論文，(1972)
- 7) J. Katz : *J. Fluid Mech.*, 102 315 (1981)